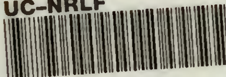
Gyldén

Summation af periodiske Functioner



KONGL. SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS HANDLINGAR. Bandet 11. N:o 1.

OM SUMMATION AF PERIODISKA FUNKTIONER.

AF

H. GYLDÉN.

TILL KONGL. VET. AKAD. INLEMNAD DEN 10 JANUARI 1872.

STOCKHOLM, 1872.
P. A. NORSTEDT & SÖNER
KONGL. BOKTRYCKARE.

Om ett ändligt antal värden af en funktion äro gifna, hvilka motsvara värden af funktionens argument, som växa med en oföränderlig och ändlig qvantitet, så kallas den operation, hvarigenom summan af dessa funktionsvärden uttryckes medelst en ny funktion: summation af den gifna funktionen. Resultatet erhålles genom integration af den ändliga differenseqvationen

$$y_s - y_{s-1} = F(s)$$

der $F(t)$ är den gifna funktionen och y_s det sökta resultatet; s betecknar på samma gång ett helt tal, då enheten för t är sålunda vald, att det oföränderliga värdet, hvarmed argumentet växer, betecknas med 1.

I några få fall, d. ä. då $F(t)$ betecknar en hel rationell algebraisk funktion eller ock en exponential- eller trigonometrisk funktion af en viss beskaffenhet, kan ofvanstående differenseqvation strängt integreras. Är $F(t)$ af en annan beskaffenhet, så finner man y_s medelst en serieutveckling, som är känd under namnet Mac Laurins summationsformel. Denna formel är likväl ingalunda allmänt användbar, ty hon hör ofta till de så kallade halfkonvergenta serierna. För att kunna bedöma möjligheten att medelst denna formel erhålla ett noggrannt resultat, blef det nödvändigt att diskutera den så kallade resttermen. Men ville man använda denna term endast för ett sådant kriterium, så skulle ej mycket vinnas, och emedan så skett, är man med lösningen af problemet att summera funktioner ej synnerligen långt kommen. Underkastar man dock resttermen en sådan transformation att hon kan numeriskt beräknas, så blifver den Mac Laurinska formeln användbar vid flera tillfällen, der hon förut hade lemnat ett helt och hållet illusoriskt resultat. Denna transformation består deri, att resttermen utvecklas i en konvergent serie; men ehuru man sålunda blifver i stånd att finna ett resultat med all önskvärd noggrannhet, så händer dock att den nya serieutvecklingens konvergens är af den natur, att användningen af densamma blefve mer än nödvändigt mödosam.

Vid de undersökningar i störingstheorien, hvarmed jag sedan någon tid sysselsatt mig, visade sig det ofvannämnda problemet erhålla en särdeles vigtig användning. Jag företog mig derföre att undersöka huruvida ej den Mac Laurinska formeln skulle kunna ersättas genom någon annan mera lämplig. Det visade sig dervid, att denna formel endast är ett speciellt fall af en allmännare, samt att ur denna allmännare formel andra speciella kunna härledas, hvilka under vissa omständigheter äro att föredraga.

Vid dessa undersökningar har jag inskränkt mig till reellt periodiska funktioner och några med dem beslägtade, emedan endast sådana förekomma vid de använd-

ningar, jag åsyftar. Af denna orsak antager jag, att $F(t)$ såväl som alla dess differentialkoefficienter ständigt kunna uttryckas medelst serier af formeln

$$(1) \qquad F(t) = M_0 + M_1 \operatorname{Cos}(\psi + \mu t) + M_2 \operatorname{Cos} 2(\psi + \mu t) + \cdots$$

der ψ betecknar en konstant båge och μ ett godtyckligt irrationellt tal. Tillika skola vi införa talet π såsom enhet för ändringen af t, då vi hafva

$$y_s - y_{s-1} = F(s\pi)$$

och erhålla, om vi sätta

$$y_0 = F(0),$$

$$(2) \qquad y_s = F(0) + F(\pi) + \cdots + F(s\pi)$$

Vi kunna gifva åt vårt problem en annan form, hvilken blifver till nytta vid användningen. Sätta vi nämnligen

$$u = \varphi(\mu t)$$

under antagandet att u är en periodisk funktion af μt, samt

$$F(t) = f(u);$$

och beteckna vi dessutom

$$u_0 = \varphi(0)$$
$$u_1 = \varphi(\mu\pi)$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_s = \varphi(s\mu\pi),$$

så är

$$y_s = f(u_0) + f(u_1) + \cdots + f(u_s)$$

och vår uppgift vore att uttrycka y_s såsom en funktion af u_s.

Införa vi i eqv. (2) värden för $F(0)$, $F(\pi)$, o. s. v., i enlighet med eqv. (1), eller

$$F(t) = M_0 + M_1 \operatorname{Cos}(\psi + ut) + M_2 \operatorname{Cos} 2(\psi + \mu t) + \cdots$$

så erhålla vi

$$\begin{aligned} y_s = (s+1) M_0 &+ M_1 \operatorname{Cos}\psi\,(1 + \operatorname{Cos}\mu\pi + \operatorname{Cos} 2\mu\pi + \cdots + \operatorname{Cos} s\mu\pi) \\ &- M_1 \operatorname{Sin}\psi\,(\operatorname{Sin}\mu\pi + \operatorname{Sin} 2\mu\pi + \cdots + \operatorname{Sin} s\mu\pi) \\ &+ M_2 \operatorname{Cos} 2\psi\,(1 + \operatorname{Cos} 2\mu\pi + \operatorname{Cos} 4\mu\pi + \cdots + \operatorname{Cos} 2s\mu\pi) \\ &- M_2 \operatorname{Sin} 2\psi\,(\operatorname{Sin} 2\mu\pi + \operatorname{Sin} 4\mu\pi + \cdots + \operatorname{Sin} 2s\mu\pi) \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

Med stöd af de bekanta relationerna

$$(3) \qquad \begin{cases} 1 + \operatorname{Cos} n\mu\pi + \operatorname{Cos} 2n\mu\pi + \cdots + \operatorname{Cos} sn\mu\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\dfrac{\operatorname{Sin}(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}n\mu\pi} \\ \operatorname{Sin} n\mu\pi + \operatorname{Sin} 2n\mu\pi + \cdots + \operatorname{Sin} sn\mu\pi = \frac{1}{2}\operatorname{Cotg}\frac{1}{2}n\mu\pi - \frac{1}{2}\dfrac{\operatorname{Cos}(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}n\mu\pi} \end{cases}$$

finner man ur ofvanstående eqvation

$$(4) \qquad \begin{aligned} y_s = (s+1) M_0 &+ \sum_1^{\infty} M_n \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}n\mu\pi \operatorname{Sin} sn\mu\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos} sn\mu\pi\right)\operatorname{Cos} n\psi \\ &- \sum_1^{\infty} M_n \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}n\mu\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}n\mu\pi \operatorname{Cos} sn\mu\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin} sn\mu\pi\right)\operatorname{Sin} n\psi \end{aligned}$$

Såvida vi nu kunna tänka oss $s\mu\pi$ uttryckt såsom en funktion af u_s och detta uttryck substitueradt i eqv. (4), så kunna vi äfven anse oss hafva en lösning till vår uppgift. Men i den händelse att utvecklingen af $F(t)$ efter multiplerna af μt endast långsamt konvergerar, blifver en dylik lösning illusorisk, eller åtminstone obrukbar för summeriska räkningar. Ty om äfven slutresultatet, ordnadt efter multiplerna af u_s såsom argument, skulle i hög grad konvergera, så skulle dock hvarje utvecklingskoefficient utgöras af en oändlig serie, hvaraf ett mycket stort antal termer blefve märkliga. Vi böra derföre söka att transformera formeln (4) på något för vårt ändamål lämpligt sätt och för sådan orsak skola vi till en början bemöda oss att framställa y_s under formen af en bestämd integral. Dessförinnan skola vi dock lägga märke till, att en del termer i uttrycket (4) omedelbart låta summera sig. Det är nämnligen

$$F(0) = M_0 + \sum_1^\infty M_n \operatorname{Cos} n\psi$$

$$F(s\pi) = M_0 + \sum_1^\infty M_n \operatorname{Cos} n\psi \operatorname{Cos} ns\mu\pi - \sum_1^\infty M_n \operatorname{Sin} n\psi \operatorname{Sin} ns\mu\pi$$

Sätta vi derföre

$$z_s = y_s - \tfrac{1}{2}F(0) - \tfrac{1}{2}F(s\pi)$$
$$= y_s - \tfrac{1}{2}f(u_0) - \tfrac{1}{2}f(u_s),$$

så blifver

$$z_s = sM_0 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty M_n \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}n\mu\pi \operatorname{Sin} n(s\mu\pi + \psi) - \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty M_n \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}n\mu\pi \operatorname{Sin} n\psi;$$

men, emedan

$$\tfrac{1}{2}\int^{n=0} \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2} n\mu\pi \{\operatorname{Sin} n(s\mu\pi + \psi) - \operatorname{Sin} n\psi\} = s,$$

så kunna vi äfven ansätta denna eqvation

$$z_s = \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty M_n \operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2}n\mu\pi \operatorname{Sin} n(\psi + s\mu\pi) - \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty M_n \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}n\mu\pi \operatorname{Sin} n\psi$$

Om vi nu skulle lyckas att bestämma en funktion $\chi(t)$ sålunda att vilkoret

(5) $$\int_0^{s\pi} \operatorname{Cos} n(\psi + \mu t)\chi(t)dt = \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2}n\mu\pi \{\operatorname{Sin} n(\psi + s\mu\pi) - \operatorname{Sin} n\psi\}$$

blefve uppfyldt, så hade vi omedelbart

$$z_s = \tfrac{1}{2}\sum_0^\infty M_n \int_0^{s\pi} \operatorname{Cos} n(\psi + t)\chi(t)dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{s\pi} \chi(t)dt \sum_0^\infty M_n \operatorname{Cos} n(\psi + \mu t)$$

d. ä.

(6) $$z_s = \tfrac{1}{2}\int_0^{s\pi} F(t)\chi(t)dt$$

Svårigheten består således nu endast deri att kunna bestämma funktionen $\chi(t)$, och denna öfvervinnes ögonblickligen, om man i stället för $\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2} n\mu\pi$ i eqv. (5) substituerar den bekanta utvecklingen

$$\operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2}n\mu\pi = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n\mu} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 2^2} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 4^2} + \cdots\right\}$$

Man har nämnligen, i fall m betecknar ett helt tal,

$$(7) \qquad \int_0^{s\pi} \operatorname{Cos} n(\psi + \mu t) \operatorname{Cos} 2mtdt = \frac{n\mu}{(n\mu)^2 - (2m)^2} \{\operatorname{Sin} n(\psi + s\pi) - \operatorname{Sin} n\psi\}$$

hvaraf följer att vilkoret (5) blifver uppfyldt om

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi}\{1 + 2 \operatorname{Cos} 2t + 2 \operatorname{Cos} 4t + \cdots \}$$

d. ä.

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Lim.} \frac{\operatorname{Sin} (2k+1)t}{\operatorname{Sin} t}$$

der Lim. betecknar att det hela talet k bör anses växande i oändlighet.

Det vunna resultatet, nämnligen

$$z_s = \frac{1}{\pi} \operatorname{Lim.} \int_0^{s\pi} F(t) \frac{\operatorname{Sin} (2k+1)t}{\operatorname{Sin} t} dt$$

är likväl för vårt ändamål utan någon omedelbar betydelse och innehåller ingenting annat än den bekanta Mac Laurinska summationsformeln. Betrakta vi likväl den väg, på hvilken detta resultat vunnits, så visar det sig att detsamma hufvudsakligast stöder sig på den anförda utvecklingen af Cotang $\frac{1}{2}n\mu\pi$. Den svårighet, som vi ännu hafva att öfvervinna, synes derföre ligga deri att finna någon annan, mera konvergent serie-utveckling för denna funktion. Sådana kunna lyckligtvis äfven ganska lätt erhållas, ehuru de hitintills tyckas hafva undgått all uppmärksamhet.

Ur den bekanta formeln

$$\operatorname{Cotang} \tfrac{1}{2}\pi x = \frac{2}{\pi x} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)\cdots}$$

följer ögonblickligen, om i betecknar ett helt positivt tal:

$$\frac{\operatorname{Cotg} \frac{1}{2}\pi x}{\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{(2i-1)^2}\right)} = \frac{2}{\pi x} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{(2i+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2i+3)^2}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)\cdots}$$

Sönderdelas här qvantiteten till höger om likhetstecknet i partialbråk, sålunda att

$$(8) \qquad \frac{\operatorname{Cotang} \frac{1}{2}\pi x}{\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{(2i-1)^2}\right)} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{X_0^{(i)}}{x} + \frac{2xX_1^{(i)}}{x^2 - 2^2} + \frac{2xX_2^{(i)}}{x^2 - 4^2} + \cdots \right\}$$

så finner man för koefficienterna $X_n^{(i)}$ följande värden

$$X_n^{(1)} = -\frac{1^2}{(2n)^2 - 1^2}$$

$$X_n^{(2)} = \frac{1^2 \cdot 3^2}{[(2n)^2 - 1^2]\,[(2n)^2 - 3^2]}$$

$$X_n^{(3)} = -\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{[(2n)^2 - 1^2]\,[(2n)^2 - 3^2]\,[(2n)^2 - 5^2]}$$

o. s. v.

Vi beteckna nu

$$(9) \qquad \chi_i(t) = \frac{2}{\pi}\{X_0^{(i)} + 2X_1^{(i)} \operatorname{Cos} 2t + 2X_2^{(i)} \operatorname{Cos} 4t + \cdots\}$$

$$1 - b_1^{(i)}x^2 + b_2^{(i)}x^4 - \ldots \pm b_i^{(i)}x^{2i} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{(2i-1)^2}\right)$$

då

$$b_1^{(1)} = 1$$

$$b_1^{(2)} = \frac{10}{9}$$

$$b_2^{(2)} = \frac{1}{9}$$

$$b_1^{(3)} = \frac{259}{225}$$

$$b_2^{(3)} = \frac{7}{45}$$

$$b_3^{(3)} = \frac{1}{225}$$

o. s. v.

Med stöd af eqvationerne (7) och (8) erhålles härmed följande relation

$$\int_0^{s\pi} \{\text{Cos}\, n(\psi + \mu t) - b_1^{(i)}(n\mu)^2 \,\text{Cos}\, n(\psi + \mu t) + \cdots \pm b_i^{(i)}(n\mu)^{2i} \,\text{Cos}\, n(\psi + \mu t)\} \chi_i(t)dt$$

$$= \text{Cotang}\, \tfrac{1}{2}n\mu\pi \,\{\text{Sin}\, n\pi(\psi + s\mu t) - \text{Sin}\, n\psi\},$$

hvarefter riktigheten af följande summationsformel omedelbart inses

$$z_s = \tfrac{1}{2}\int_0^{s\pi} \left\{F(t) + b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right\} \chi_i(t)dt \qquad (10)$$

§ 2.

Den utveckling af Cotang $\frac{1}{2}\pi x$, hvarpå summationsformeln (10) är grundad, skall nu bevisas på en helt annan, om ock något längre väg. Man skall derunder blifva i tillfälle att finna nya uttryck för den funktion, som i föregående § blifvit betecknad med $\chi_i(t)$, samt för andra med denna nära beslägtade. De resultat, som sålunda träda i dagen, äro tillika analoga med dem, hvilka jag framvisat i min afhandling: "Relationer emellan Siner och Cosiner för irrationella vinklar", Helsingfors 1867.

Om ϑ betecknar en vinkel, som tänkes variera emellan gränserna $-\frac{1}{2}\pi$ och $+\frac{1}{2}\pi$, så kan funktionen Cos ϑ^{2i+1}, der i betyder ett helt positivt tal, framställas medelst följande serie:

$$C_0^{(i)} - 2C_2^{(i)} \,\text{Cos}\, 2\vartheta - 4C_4^{(i)} \,\text{Cos}\, 4\vartheta - \cdots$$

då

$$C_0^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{Cos}\, \vartheta^{2i+1} d\vartheta$$

och

$$C_{2n}^{(i)} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{Cos}\, 2n\vartheta \,\text{Cos}\, \vartheta^{2i+1} d\vartheta$$

eller

$$C_0^{(i)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2.4.6\,..\,2i}{1.3.5\,..\,(2i+1)}$$

$$C_{2n}^{(i)} = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2n}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2n+1}{2}\,\pi\,\frac{(-1)^i\,1.2.3\ldots 2i(2i+1)}{[(2n)^2-1^2]\,[(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]}$$

Jemföres dessa värden med dem, hvilka vi i föregående § funno för koefficienterna $X_n^{(i)}$, så inses ögonblickligen:

(11) $$\frac{C_{2n}^{(i)}}{C_0^{(i)}} = -\,\frac{1}{n}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2n+1}{2}\,\pi\,X_n^{(i+1)}$$

Vi hafva således:

(12) $$\frac{1}{C_0^{(i)}}\,\mathrm{Cos}\,\vartheta^{2i+1} = 1 - 2X_1^{(i+1)}\,\mathrm{Cos}\,2\vartheta + 2X_2^{(i+1)}\,\mathrm{Cos}\,4\vartheta - \ldots,$$

d. ä., med hänseende till eqv. (9)

$$\mathrm{Sin}\,\vartheta^{2i+1} = \frac{\pi}{2}\,C_0^{(i)}\chi_i(\vartheta)$$

(13) $$= \frac{2.4.6\,..\,2i}{1.3.5\,..\,2i+1}\,\chi_i(\vartheta)$$

så länge

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi$$

Emedan dock ofvanstående eqvation förblifver oförändrad, om ϑ ökas med någon multipel af 2π, så bibehåller hon sin giltighet för alla ϑ-värden, hvilka uppfylla vilkoret

$$2m\pi \leqq \vartheta \leqq (2m+1)\pi.$$

Deremot är

(14) $$\mathrm{Sin}\,\vartheta^{2i+1} = -\frac{2.4.6\,..\,2i}{1.3.5\,..\,2i+1}\,\chi_{i+1}(\vartheta)$$

så länge

$$(2m-1)\pi \leqq \vartheta \leqq 2m\pi$$

Om nu eqv. (12) multipliceras med $d\vartheta$ och derefter integreras, så uppstår ett resultat af formeln

(15) $$\vartheta = \sum_1^\infty \beta_{2n}^{(i)}\,\mathrm{Sin}\,2n\vartheta + \frac{\pi}{2}\sum_0^i \alpha_{2n+1}^{(i)}\,\mathrm{Sin}\,(2n+1)\vartheta$$

der

$$\beta_{2n}^{(i)} = \frac{C_{2n}^{(i)}}{C_0^{(i)}} = -\,\frac{(-1)^n}{n}\,X_n^{(i+1)} = -\,\frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,n\pi X_n^{(i+1)}$$

$$\alpha_{2n+1}^{(i)} = \frac{1.3.5\,..\,2i+1}{2.4.6\,..\,2i}\,\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{2^{2i}}\,\frac{(2i+1)2i(2i-1)\,..\,(i+n+2)}{1.2.3\,..\,(i-n)}$$

I likhet med eqv. (12) gäller eqv. (15) endast för ϑ-värden, hvilka ej öfverskrida gränserna $-\frac{1}{2}\pi$ och $+\frac{1}{2}\pi$.

Multipliceras härpå eqv. (15) en gång med $\mathrm{Cos}\,x\vartheta\,.\,d\vartheta$, och derefter med $\mathrm{Sin}\,x\vartheta\,.\,d\vartheta$, der x betecknar en fullkomligt godtycklig storhet, så erhålles medelst integration:

$$\int\vartheta\,\mathrm{Cos}\,x\vartheta d\vartheta = C - \mathrm{Cos}\,x\vartheta\sum_1^\infty\frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\,\mathrm{Cos}\,2n\vartheta - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Cos}\,x\vartheta\sum_0^i\frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\,\mathrm{Cos}\,(2n+1)\vartheta$$

$$-\,x\,\mathrm{Sin}\,x\vartheta\sum_1^\infty\frac{\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\,\mathrm{Sin}\,2n\vartheta - \frac{\pi}{2}x\,\mathrm{Sin}\,x\vartheta\sum_0^i\frac{\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\,\mathrm{Sin}\,(2n+1)\,\vartheta$$

$$\int \vartheta \,\mathrm{Sin}\, x\vartheta d\vartheta = C_1 - \mathrm{Sin}\, x\,\vartheta \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\, 2n\vartheta - \frac{\pi}{2} \mathrm{Sin}\, x\vartheta \sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\,(2n+1)\vartheta$$

$$+ x\,\mathrm{Cos}\, x\vartheta \sum_1^\infty \frac{\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\, 2n\vartheta + \frac{\pi}{2} x\,\mathrm{Cos}\, x\vartheta \sum_0^i \frac{\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\,(2n+1)\vartheta$$

der vi med C och C_1 betecknat tvenne integrationskonstanter.

Multipliceras den förra af dessa eqvationer med Cos $x\vartheta$, den sednare med Sin $x\vartheta$, adderas produkterna och fäster man dervid afseende vid denna eqvation:

$$\mathrm{Cos}\, x\vartheta \int \vartheta \,\mathrm{Cos}\, x\vartheta d\vartheta + \mathrm{Sin}\, x\vartheta \int \vartheta \,\mathrm{Sin}\, x\vartheta d\vartheta = \frac{1}{x^2},$$

så erhålles

$$(a) \qquad C\,\mathrm{Cos}\, x\vartheta + C_1 \mathrm{Sin}\, x\vartheta = \frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\, 2n\vartheta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\,(2n+1)\vartheta$$

och genom differentiation af denna i afseende på ϑ framgår:

$$(b) \qquad -xC\,\mathrm{Sin}\, x\vartheta + xC_1 \mathrm{Cos}\, x\vartheta = -\sum_1^\infty \frac{(2n)^2\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\, 2n\vartheta - \frac{\pi}{2} \sum_0^i \frac{(2n+1)^2\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\,(2n+1)\vartheta$$

Insättes $\vartheta = 0$ i eqv. (b), så finner man:

$$C_1 = 0;$$

gifver man härefter åt ϑ värdet $\frac{\pi}{2}$ och betecknar man

$$\sum_0^i \frac{\alpha_{2n+1}^{(i)}}{1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2}} \mathrm{Sin}\, \frac{2n+1}{2}\pi = \frac{1}{\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)},$$

så gifver samma eqvation:

$$C = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x\,\mathrm{Sin}\, x\frac{\pi}{2}\, \varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)}$$

Med dessa värden för C och C_1 finner man slutligen ur eqv. (a)

$$(16) \quad \mathrm{Cos}\, x\vartheta = x\frac{2}{\pi} \mathrm{Sin}\, x\frac{\pi}{2} \varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right) \left\{ \frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\, 2n\vartheta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\,(2n+1)\vartheta \right\}$$

Likaledes finner man ur eqv. (b), eller genom att differentiera eqv. (16) i afseende på ϑ:

$$(17) \qquad \mathrm{Sin}\, x\vartheta = \frac{2}{\pi} \mathrm{Sin}\, x\frac{\pi}{2} \varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right) \left\{ \sum_1^\infty \frac{(2n)^2\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\, 2n\vartheta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \frac{(2n+1)^2\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\,(2n+1)\,\vartheta \right\}$$

De genom eqvationerne (16) och (17) uttalade theorem motsvaras i min afhandling »Relationer etc.» af eqvationerne (26) och (27), hvilka med här begagnade beteckningar hafva följande utseende:

$$(18) \quad \mathrm{Cos}\, x\vartheta = \mathrm{Cos}\, x\frac{\pi}{2} \varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right) \left\{ 1 + x^2 \sum_0^\infty \frac{(2n+1)\beta_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\,(2n+1)\vartheta - \sum_1 \frac{2n\alpha_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Cos}\, 2n\vartheta \right\}$$

$$(19) \quad \mathrm{Sin}\, x\vartheta = x\,\mathrm{Cos}\, x\frac{\pi}{2} \varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right) \left\{ \sum_0^\infty \frac{(2n+1)^2\beta_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\,(2n+1)\vartheta - \sum_1^i \frac{(2n)^2\alpha_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \mathrm{Sin}\, 2n\vartheta \right\}$$

Dessa eqvationer kunna härledas ur eqvationen

$$\vartheta = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)} \operatorname{Sin}(2n+1)\vartheta - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)} \operatorname{Sin} 2n\,\vartheta$$

alldeles på samma sätt, som eqvationerna (16) och (17) här blifvit deducerade ur eqv. (15), ehuru i den ofvan åberopade afhandlingen en helt annan väg blifvit följd.

Jemför man uttrycken för $\beta_{2n}^{(i)}$ och $\beta_{2n+1}^{(i)}$, nämnligen

$$\beta_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n} \operatorname{Cos} n\pi \frac{(-1)^i 1^2 . 3^2 .. (2i+1)^2}{[(2n)^2 - 1^2][(2n)^2 - 3^2] ... [(2n)^2 - (2i+1)^2]}$$

och

$$\beta_{2n+1}^{(i)} = \frac{2}{\pi} \frac{2}{2n+1} \operatorname{Sin} \frac{2n+1}{2} \pi \frac{(-1)^i 2^2 . 4^2 . 6^2 .. (2i)^2}{[(2n)^2 - 1^2][(2n)^2 - 3^2] ... [(2n)^2 - (2i+1)^2]} [2n - (2i+1)].$$

så finner man följande relation

$$\frac{\beta_{2n+1}^{(i)}}{\beta_{2n}^{(i)}} = \frac{2}{\pi} \frac{2n}{2n+1} [2n - (2i+1)] \frac{2^2 . 4^2 ... (2i)^2}{1^2 . 3^2 .. (2i+1)^2}$$

Äfvenså erhålles ur uttrycken

$$\alpha_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n} \frac{1}{2^{2i}} \frac{2i(2i-1) .. (i+n+1)}{1.2.3 .. (i-n)} 2^{2i} \frac{i.2.3 .. i}{(i+1)(i+2) .. 2i}$$

$$\alpha_{2n+1}^{(i)} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2i}} \frac{(2i+1)2i ... (i+n+2)}{1.2.3 ... (i-n)} \frac{1.3.5 .. 2i+1}{2.4.6 .. 2i}$$

$$\frac{\alpha_{2n}^{(i)}}{\alpha_{2n+1}^{(i)}} = \frac{2n+1}{2n} (2n+2i+2) \frac{2^{2i}}{2i+1} \frac{1.2.3 .. i}{(i+1)(i+2) .. 2i} \frac{2.4.6 .. 2i}{1.3.5 ... 2i+1}$$

hvaraf, med stöd af den kända relationen

$$1.2.3 .. i . 2^{2i} = \frac{1.2.3 .. 2i}{1.3.5 .. (2i-1)} 2^i = \frac{2.4.6 .. 2i}{1.3.5 ... (2i-1)} (i+1)(i+2) .. 2i$$

man omedelbart erhåller det enklare uttrycket

$$\frac{\alpha_{2n}^{(i)}}{\alpha_{2n+1}^{(i)}} = \frac{2n+1}{2n} (2n+2i+2) \frac{2^2 . 4^2 .. (2i)^2}{1^2 . 3^2 . 5^2 .. (2i+1)^2}$$

Den funktion, som vi här betecknat med $\varkappa(2i, x\frac{\pi}{2})$ är slutligen definierad medelst följande eqvation

$$\varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right) ... \left(1 - \frac{x^2}{(2i)^2}\right)$$

Insätta vi $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ i eqv. (16), så erhålles med hänseende till relationen emellan $\beta_{2n+1}^{(i)}$ och $X_n^{(i+1)}$

$$\frac{\operatorname{Cotg} x\frac{\pi}{2}}{\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{x} + \frac{2x X_1^{(i+1)}}{x^2 - 2^2} + \frac{2x X_2^{(i+1)}}{x^2 - 4^2} + \cdots\right\}$$

Skall denna utveckling vara identisk med den i eqv. (8), så bör

$$\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) .. \left(1 - \frac{x^2}{(2i+1)^2}\right)$$

Vi hafva emellertid å andra sidan

$$\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\alpha_1^{(i)}}{1 - \frac{x^2}{1^2}} - \frac{\alpha_3^{(i)}}{1 - \frac{x^2}{3^2}} + \cdots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{1 - \frac{x^2}{(2i+1)^2}}}$$

Emedan $\varkappa(2i+1, x\frac{\pi}{2})$ påtagligen måste vara en synnektisk funktion, som icke blifver oändlig för något ändligt x-värde, så erfordras för att den här ifrågavarande identiteten skall ega rum, 1:o att de båda uttrycken, vi angifvit för $\varkappa(2i+1, x\frac{\pi}{2})$, försvinna för samma x-värden, samt 2:o att desamma uttrycken ej äro olika i något konstant förhållande.

Om nu funktionen

$$\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}\right)$$

försvinner på samma sätt som

$$\frac{1}{\dfrac{\alpha_1^{(i)}}{1-\frac{x^2}{1^2}}-\dfrac{\alpha_3^{(i)}}{1-\frac{x^2}{3^2}}+\cdots\pm\dfrac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}}}$$

så blifver å andra sidan funktionerna

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}\right)}$$

och

$$\frac{\alpha_1^{(i)}}{1-\frac{x^2}{1^2}}-\frac{\alpha_3^{(i)}}{1-\frac{x^2}{3^2}}+\cdots\pm\frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}}$$

på samma sätt oändligt stora och tvärtom. Men detta sednare inträffar ögonskenligen, hvaraf vi sluta *att de begge uttrycken vi anfört för* $\varkappa(2i+1, x\frac{\pi}{2})$ *äro identiska*, åtminstone så när som på en konstant faktor. Denna faktor kunna vi bestämma genom att sätta $x=0$, och det visar sig då att densamma ej kan hafva något annat värde än 1, alldenstund vi ur eqv. (15) finna att

$$1=\alpha_1^{(i)}-\alpha_3^{(i)}+\cdots\pm\alpha_{2i+1}^{(i)}$$

Såsom en konseqvens af den bevisade identiteten, erhålla vi äfven följande uttryck för koefficienterna $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$, o. s. v.:

$$\alpha_1^{(i)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2i+1)^2}\right)}$$

$$\alpha_3^{(i)}=-\frac{1}{\left(1-\frac{3^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{3^2}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{3^2}{(2i+1)^2}\right)}$$

$$\alpha_5^{(i)}=\frac{1}{\left(1-\frac{5^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{5^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{5^2}{7^2}\right)\cdots\left(1-\frac{5^2}{(2i+1)^2}\right)}$$

o. s. v.

§ 3.

Den genom eqv. (10) angifna summationsformeln kan underkastas en ganska vigtig transformation, för hvilken vi nu skola redogöra.

Om vi erinra oss den för funktionen $\chi_i(t)$ angifna serieutveckling och för korthetens skull sätta

$$T_s^{(i)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left\{F(t)+b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2}+\cdots+b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right\}\left\{X_1^{(i)}\operatorname{Cos}2t+X_2^{(i)}\operatorname{Cos}4t+\cdots\right\}dt$$

så blifver

$$z_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{s\pi}\left\{F(t) + b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right\}dt + T_s^{(i)}$$

Vår transformation berör endast termen $T_s^{(i)}$, för hvilken vi medelst delvis integration först erhåller:

$$T_s^{(i)} = \frac{2}{\pi}\Big/_0^{s\pi}\left\{F(t) + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right\}\left\{\frac{1}{2}X_1^{(i)}\operatorname{Sin} 2t + \frac{1}{4}X_2^{(i)}\operatorname{Sin} 4t + \cdots\right\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left\{\frac{dF(t)}{dt} + b_1^{(i)}\frac{d^3F(t)}{dt^3} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+1}F(t)}{dt^{2i+1}}\right\}\left\{\frac{1}{2}X_1^{(i)}\operatorname{Sin} 2t + \cdots\right\}dt$$

Upprepar man denna operation och erinrar sig dervid, att Sin $2t$, Sin $4t$ o. s. v. såväl för 0 som för $s\pi$ försvinna, samt att Cos $2t$, Cos $4t$, o. s. v. för dessa gränsvärden erhålla ett och samma konstanta värde, nämnligen 1, så finner man:

$$T_s^{(i)} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2^2}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^2}X_2^{(i)} + \cdots\right\}\Big/_0^{s\pi}\left\{\frac{dF(t)}{dt} + b_1^{(i)}\frac{d^3F(t)}{dt^3} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+1}F(t)}{dt^{2i+1}}\right\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left\{\frac{d^2F(t)}{dt^2} + b_1^{(i)}\frac{d^4F(t)}{dt^4} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+2}F(t)}{dt^{2i+2}}\right\}\left\{\frac{1}{2^2}X_1^{(i)}\operatorname{Cos} 2t + \frac{1}{4^2}X_2^{(i)}\operatorname{Cos} 4t + \cdots\right\}dt$$

Fortsätter man detta förfarande, så erhåller man, då ν betecknar ett helt positiv tal:

(20) $$T_s^{(i)} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2^2}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^2}X_2^{(i)} + \cdots\right\}\Big/_0^{s\pi}\left\{\frac{dF(t)}{dt} + b_1^{(i)}\frac{d^3F(t)}{dt^3} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+1}F(t)}{dt^{2i+1}}\right\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2^4}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^4}X_2^{(i)} + \cdots\right\}\Big/_0^{s\pi}\left\{\frac{d^3F(t)}{dt^3} + b_1^{(i)}\frac{d^5F(t)}{dt^5} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+3}F(t)}{dt^{2i+3}}\right\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{2}{\pi}\left\{\frac{i}{2^{2\nu}}X_1^{(i)} + \frac{1}{2^{2\nu}}X_2^{(i)} + \cdots\right\}\Big/_0^{s\pi}\left\{\frac{d^{2\nu-1}F(t)}{dt^{\nu-1}} + b_1^{(i)}\frac{d^{2\nu+1}F(t)}{dt^{2\nu+1}} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+2\nu-1}F(t)}{dt^{2i+2\nu-1}}\right\}$$

$$\mp\frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left\{\frac{d^{2\nu}F(t)}{dt^{2\nu}} + b_1^{(i)}\frac{d^{2\nu+2}F(t)}{dt^{2\nu+2}} + \cdots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+2\nu}F(t)}{dt^{2i+2\nu}}\right\}\left\{\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i)}\operatorname{Cos} 2t + \frac{1}{4^{2\nu}}X_2^{(i)}\operatorname{Cos} 4t + \cdots\right\}dt$$

§ 4.

För användandet af formeln (20) återstår oss ännu att bestämma värdet af de konstanta faktorerna i de från integraltecknet befriade termerna. Tillsvidare äro nämn-

ligen dessa faktorer endast angifna i form af oändliga serier; men med tillhjelp af de satser, som blifvit utvecklade i § 2, är det ganska lätt att angifva slutna värden för desamma.

Vi hafva först i enlighet med eqv. (13)

$$\frac{1.3.5..(2i+1)}{2.4.6..2i}\operatorname{Sin}\vartheta^{2i+1}-\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}\{X_1^{(i+1)}\operatorname{Cos}2\vartheta+X_2^{(i+1)}\operatorname{Cos}4\vartheta+..\}$$

Multipliceras denna eqvation med $d\vartheta$ och integreras, så framträder, om integrationskonstanten betecknas med $c_1^{(i)}$:

$$(21)\quad c_1^{(i)}+\frac{1.3.5..(2i+1)}{2.4.6..2i}\int\operatorname{Sin}\vartheta^{2i+1}d\vartheta-\frac{2}{\pi}\vartheta=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}X_1^{(i+1)}\operatorname{Sin}2\vartheta+\frac{1}{4}X_2^{(i+1)}\operatorname{Sin}4\vartheta+..\right\}$$

Nu är likväl, i enlighet med de beteckningar, vi begagnat vid uppställandet af eqv. (15),

$$-\frac{1.3.5..(2i+1)}{2.4.6..2i}\int\operatorname{Sin}\vartheta^{2i+1}d\vartheta=\alpha_1^{(i)}\operatorname{Cos}\vartheta-\alpha_3^{(i)}\operatorname{Cos}3\vartheta+\cdots\pm\alpha_{2i+1}^{(i)}\operatorname{Cos}(2i+1)\vartheta,$$

Insättes detta värde i eqv. (21), så erhåller man

$$(22)\quad c_1^{(i)}-\frac{2}{\pi}\vartheta=\alpha_1^{(i)}\operatorname{Cos}\vartheta-\alpha_3^{(i)}\operatorname{Cos}3\vartheta+\cdots\pm\alpha_{2i+1}^{(i)}\operatorname{Cos}(2i+1)\vartheta$$
$$+\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}X_1^{(i+1)}\operatorname{Sin}2\vartheta+\frac{1}{4}X_2^{(i+1)}\operatorname{Sin}4\vartheta+\cdots\right\}$$

Specialiseras ϑ i denna eqvation sålunda, att för detsamma antages värdet 0, så erhålles

$$(\alpha)\quad c_1^{(i)}=\alpha_1^{(i)}-\alpha_3^{(i)}+\cdots\pm\alpha_{2i+1}^{(i)}$$
$$=1$$

Ur eqvationen (22) erhålles vidare medelst multiplikation med $d\vartheta$ och derpå följande integration:

$$(23)\quad c_2^{(i)}+c_1^{(i)}\vartheta-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)\vartheta_2=\frac{\alpha_1^{(i)}}{1}\operatorname{Sin}\vartheta-\frac{\alpha_3^{(i)}}{3}\operatorname{Sin}3\vartheta+\cdots\pm\frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{2i+1}\operatorname{Sin}(2i+1)\vartheta$$
$$-\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2^2}X_1^{(i+1)}\operatorname{Cos}2\vartheta+\frac{1}{4^2}X_2^{(i+1)}\operatorname{Cos}4\vartheta+\cdots\right\}$$

hvaraf följer

$$c_2^{(i)}=-\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2^2}X_1^{(i+1)}+\frac{1}{4^2}X_2^{(i+1)}+\cdots\right\}$$

Eqv. (23) gifver oss vidare

$$c_3^{(i)}+c_2^{(i)}\vartheta+\frac{1}{2}c_1^{(i)}\vartheta^2-\frac{1}{2.3}\left(\frac{2}{\pi}\right)\vartheta^3=-\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^2}\operatorname{Cos}\vartheta+\frac{\alpha_3^{(i)}}{3^2}\operatorname{Cos}3\vartheta-\cdots\pm\frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^2}\operatorname{Cos}(2i+1)\vartheta$$
$$-\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2^3}X_1^{(i+1)}\operatorname{Sin}2\vartheta+\frac{1}{4^3}X_2^{(i+1)}\operatorname{Sin}4\vartheta+\cdots\right\}$$

hvarur erhålles, om ϑ sättes lika med noll,

$$(\beta)\quad c_3^{(i)}=-\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^2}+\frac{\alpha_3^{(i)}}{3^2}-\cdots\pm\frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^2}$$

Sättes åter $\frac{\pi}{2}$ i stället för ϑ, så försvinner högra delen af ofvanstående eqvation, och vi erhålla

$$c_2^{(i)}\frac{\pi}{2} = - c_3^{(i)} - \frac{1}{2}c_1^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Genom att fortsätta detta förfarande erhålles i allmänhet

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} & c_{2\nu}^{(i)} + c_{2\nu-1}^{(i)}\vartheta + \frac{1}{2}c_{2\nu-2}^{(i)}\vartheta^2 + \ldots + \frac{1}{1.2.3..2\nu-1}c_1^{(i)}\vartheta^{2\nu-1} - \frac{1}{1.2.3..2\nu}\left(\frac{2}{\pi}\right)\vartheta^{2\nu} \\ & = (-1)^{\nu-1}\left\{\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^{2\nu-1}}\operatorname{Sin}\vartheta - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^{2\nu-1}}\operatorname{Sin}3\vartheta + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^{2\nu-1}}\operatorname{Sin}(2i+1)\vartheta\right\} \\ & + (-1)^{\nu}\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i+1)}\operatorname{Cos}2\vartheta + \frac{1}{4^{2\nu}}X_1^{(i+1)}\operatorname{Cos}4\vartheta + \ldots\right\} \end{aligned}\right.$$

och

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} & c_{2\nu+1}^{(i)} + c_{2\nu}^{(i)}\vartheta + \frac{1}{1.2}c_{2\nu-1}^{(i)}\vartheta^2 + \ldots + \frac{1}{1.2.3..2\nu}c_1^{(i)}\vartheta^{2\nu} - \frac{1}{1.2.3..(2\nu+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)\vartheta^{2\nu+1} \\ & = (-1)^{\nu}\left\{\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^{2\nu}}\operatorname{Cos}\vartheta - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^{2\nu}}\operatorname{Cos}3\vartheta + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^{2\nu}}\operatorname{Cos}(2i+1)\vartheta\right\} \\ & + (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2^{2\nu+1}}X_1^{(i+1)}\operatorname{Sin}2\vartheta + \frac{1}{4^{2\nu+1}}X_2^{(i+1)}\operatorname{Sin}4\vartheta + \ldots\right\} \end{aligned}\right.$$

Eqv. (24) gifver oss

$$(26)\quad \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i+1)} + \frac{1}{4^{2\nu}}X_2^{(i+1)} + \ldots\right\} = \frac{1}{2}(-1)^{\nu}c_{2\nu}^{(i)};$$

ur eqv. (25) finna vi åter

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} & c_{2\nu+1}^{(i)} = (-1)^{\nu}\left\{\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^{2\nu}} - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^{2\nu}} + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^{2\nu}}\right\} \\ & \frac{1}{2}(-1)^{\nu}c_{2\nu}^{(i)} = -\frac{1}{\pi}(-1)^{\nu}\left\{c_{2\nu+1}^{(i)} + \frac{1}{1.2}c_{2\nu-1}^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}c_{2\nu-2}^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \ldots\right. \\ & \qquad \left. + \frac{1}{1.2.3..2\nu}c_1^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu} - \frac{1}{1.2.3..(2\nu+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu}\right\} \end{aligned}\right.$$

Medelst eqvationerne (26) och (27) äro de konstanta koefficienterna i eqv. (20) i allmänhet angifna i sluten form, men om i i sistnämnda eqvation erhåller värdet 0, så blifva de formler, vi till sist funnit, utan gällande kraft. För denna händelse är dock de ifrågavarande seriernas summa känd, ty vi hafva

$$X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = \ldots = 1$$

och

$$\frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{1}{4^{2\nu}} + \ldots = \frac{1}{2}B_{2\nu-1}\frac{\pi^{2\nu}}{1.2.3..2\nu}$$

der $B_{2\nu-1}$ beteckna de Bernoulliska talen, nämligen $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}$, $B_7 = \frac{1}{30}$, o. s. v.

§ 5.

De resultat, hvilka i föreliggande afhandling blifvit bragta i dagen, äro betingade af möjligheten att kunna utveckla Cotangenten för hvilken vinkel som helst i en

ständigt konvergerande serie. Vi hafva sett huru en sådan utveckling låter utföra sig sålunda, att konvergensen blifver tillräcklig för summeriska beräkningar. Jag skall nu, ehuru detta egentligen ej hör till föreliggande ämne, äfven anföra analoga utvecklingar för tangenten, secanten och cosecanten. Dylika utvecklingar erhållas ögonblickligen ur eqvationerne (16), (17), (18) och (19) genom att i dem införa passande speciella värden för ϑ. Vi erhålla sålunda

$$\text{Tang}\, x\frac{\pi}{2} = x\varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{1^2\beta_1^{(i)}}{1^2-x^2} - \frac{3^2\beta_3^{(i)}}{3^2-x^2} + \frac{5^2\beta_5^{(i)}}{5^2-x^2} - \cdots\right\}$$

$$\text{Cotg}\, x\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{1}{x} - \frac{2x\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} + \frac{4x\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} - \cdots\right\}$$

$$\text{Sec}\, x\frac{\pi}{2} = \varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)\left\{1 + \frac{x^2\beta_1^{(i)}}{1^2-x^2} + \frac{3x^2\beta_3^{(i)}}{3^2-x^2} + \cdots - \frac{2x^2\alpha_2^{(i)}}{2^2-x^2} - \frac{4x^2\alpha_4^{(i)}}{4^2-x^2} - \cdots - \frac{2i^2\alpha_{2i}^{(i)}}{(2i)^2-x^2}\right\}$$

$$\text{Cosec}\, x\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{1}{x} + \frac{2x\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} + \frac{4x\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\frac{x\alpha_1^{(i)}}{1^2-x^2} + \frac{\pi}{2}\frac{3x\alpha_3^{(i)}}{3^2-x^2} + \cdots + \frac{\pi}{2}\frac{(2i+1)x\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^2-x^2}\right\}$$

Jag afslutar här dessa undersökningar med att påpeka den stora formelrikedom, som låter utveckla sig på grund af de anförda relationerna. Differentieras t. ex. den andra af ofvanstående eqvationer i afseende på x, så erhålles

$$\frac{1}{\left(\text{Sin}\, x\frac{\pi}{2}\right)^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{2.2\,x^2\beta_2^{(i)}}{(2^2-x^2)^2} - \frac{2.4\,x^2\beta_4^{(i)}}{(4^2-x^2)^2} + \cdots\right\}$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{2\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} - \frac{4\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} + \cdots\right\}$$

$$- \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{d\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)}{dx}\left\{\frac{1}{x} - \frac{2x\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} + \frac{4x\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} - \cdots\right\}$$

Betraktar man μ såsom föränderlig i eqvationerna (3), och differentieras dessa i afseende på denna qvantitet, så finner man

$$\text{Sin}\, n\mu\pi + 2\,\text{Sin}\, 2n\mu\pi + \cdots + s\,\text{Sin}\, sn\mu\pi = \frac{1}{4}\frac{\text{Sin}\, sn\mu\pi}{(\text{Sin}\,\frac{1}{2}n\mu\pi)^2} - \frac{1}{2}s\frac{\text{Cos}\,(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}n\mu\pi}$$

$$1 + \text{Cos}\, n\mu\pi + 2\,\text{Cos}\, 2n\mu\pi + \cdots + s\,\text{Cos}\, sn\mu\pi = 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{(\text{Sin}\,\frac{1}{2}n\mu\pi)^2} + \frac{1}{4}\frac{\text{Cos}\, sn\mu\pi}{(\text{Sin}\,\frac{1}{2}n\mu\pi)^2} + \frac{1}{2}s\frac{\text{Sin}\,(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}n\mu\pi}$$

Förmedelst dessa relationer härleder man summationsresultat för funktionen

$$t\{M_0 + M_1\,\text{Cos}\,(\psi + \mu t) + \cdots\}$$

på samma sätt, som ofvan för den i (1) angifna serien.

